

极限偏振理论引导

基于K. G. Budden 1952文章

曹顺顺

北京大学

2025 年 3 月 23 日

Outline

- ① 文章之外的简介
- ② Budden文章的介绍
- ③ 基本方程和magneto-ionic理论
- ④ 耦合波模方程的导出
- ⑤ 耦合波模方程的求解
- ⑥ 参考文献

脉冲星辐射理论三部分

V. S. Beskin和A. A. Philippov在[Beskin and Philippov, 2012]中指出，一个完整的脉冲星辐射理论应该包含三个主要部分：

- ① 辐射/激发机制：产生等离子体不稳定性/粒子团簇，相干辐射
- ② 饱和机制：不稳定性如何达到饱和，决定辐射的绝对强度
- ③ 传播机制：辐射在从脉冲星磁层中传出的过程中发生了什么

如果我们关注脉冲星信号的偏振，前两个过程决定了初始偏振，而最后一个过程决定了偏振末态。前两个过程都不可避免地非线性，而传播过程基本上可以认为是对脉冲星磁层的线性微扰。



在上一页所述的三部分中，传播过程是相对更容易进行理论和数据的对比的。研究传播过程主要是考虑磁层中波模的特性，即不同模式的色散关系和偏振本征态。脉冲星磁层，或者说更一般的磁化等离子体的一个基本特性在于**双折射**：磁场破坏了对称性，类似晶体中的光轴，引入了**寻常波模** (Ordinary mode, O mode) 和**非寻常波模** (Extraordinary mode, E/X mode). 强磁场中的它们在观测上对应了脉冲星辐射中的**正交偏振模式** (Orthogonal Polarization Mode, OPM).

极限偏振 (limiting polarization)¹

射电波从脉冲星磁层中出来的过程中，一定会经历一个磁层粒子数密度降低的区域。当粒子数密度足够低的时候，磁层不再对射电波有影响，这时我们可以说射电波的偏振已经被决定了，不再变了。这个不再变的偏振往往被称为**极限偏振 (limiting polarization)**。若想定量描述射电波偏振行为，极限偏振是必须考虑的。极限偏振被决定下来的区域，在脉冲星磁层中一般叫limiting polarization region或polarization limiting region (PLR)。

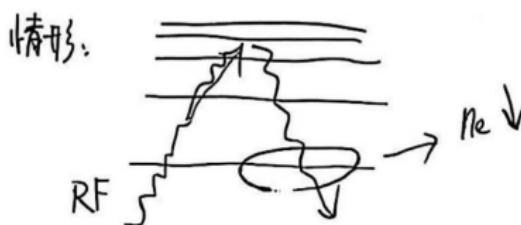
¹这个中文翻译参考了金兹堡的《电磁波在等离子体中的传播》的翻译。

研究极限偏振的一个难点在于介质不均匀，后面我们将看到这种不均匀性会引起波模之间的耦合。脉冲星的极限偏振方面的早期研究主要只是对极限偏振区域的估计（例如[Cheng and Ruderman, 1979]），后面更定量的研究主要有Y. E. Lyubarskii和S. A. Petrova在2000年前后的一系列文章（例如[Petrova and Lyubarskii, 2000]），以及2010年前后王陈等人（例如[Wang et al., 2010]）、V. S. Beskin及其学生/合作者的一些文章（例如[Beskin and Philippov, 2012]）。

今天我们先从不那么极端的系统入手来看看极限偏振的问题怎么处理：分析K. G. Budden在1952年研究地球电离层中通信无线电波极限偏振的理论手段。

电离层中的极限偏振过程

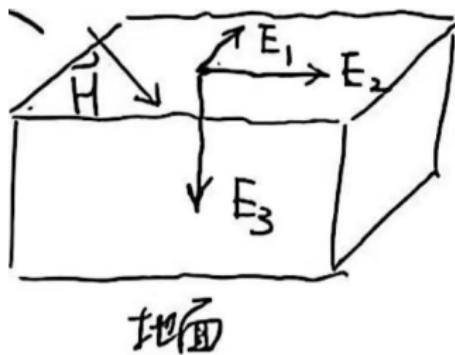
无线电通信依赖地球电离层的反射，Budden的文章讨论的是一个从电离层中反射回地面的无线电波的极限偏振：随着高度降低，电离粒子复合，等离子体密度越来越小，如图1所示。



$n_e \rightarrow 0$ 时, polarization fixed... to what?
 \Rightarrow limiting polarization.

图：电离层中被反射的无线电波，我手画的。

Budden将这个系统做了进一步简化：电离层只在竖直方向有密度分布，地磁场在考虑的区域内恒定，平面无线电波竖直方向入射出射。本文选取的坐标如图2所示： z 方向取竖直向下（与地磁场竖直分量一致）， y 方向与地磁场水平分量一致， x 方向垂直于地磁场。



图：Budden文章的坐标选取示意，我手画的。

麦克斯韦方程组

考虑一般情形：想找波模，跟电动力学中学的一样，需要先简化麦克斯韦方程组，再代入介质特性（本构关系）。

麦克斯韦方程组（电离层中无自由电荷以及自由电流）：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1)$$

考虑波动解含时部分为 $e^{i\omega t}$ ，将麦克斯韦方程组中旋度的两个式子展开：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu_0 H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0 H_z \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega D_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega D_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega D_z \end{array} \right. \quad (3)$$

空间的部分， z 方向上传播的平面电磁波， $\partial/\partial x$ 和 $\partial/\partial y$ 对各项都得0：

$$\begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu_0 H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega\mu_0 H_y \\ H_z = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega D_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = i\omega D_y \\ D_z = 0 \end{cases} \quad (5)$$

从中消去 H_x 和 H_y ，得到 D 和 E 的关系：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu_0 D_x \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu_0 D_y \end{cases} \quad (6)$$

代入 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 和 $k = \omega/c$ 得²:

$$\begin{cases} \epsilon_0 \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -D_x \\ \epsilon_0 \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -D_y \end{cases} \quad (7)$$

引入记号 $E' = \frac{1}{k} \frac{\partial E}{\partial z}$, 即得到Budden文章里的(2)(3)式:

$$\begin{cases} \epsilon_0 E_1'' + D_1 = 0 \\ \epsilon_0 E_2'' + D_2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

²文章中的这个关系跟我们常见的介质中的 $k = \omega n / c$ 不同, 单纯是定义的区别

电离层的本构关系

下面通过电离层的介质特性得到E和P的关系。忽略离子的运动，考虑电子在电磁场中做带碰撞阻尼的运动：

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = e(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{B}) - mv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (9)$$

其中 e 是电子电荷（负的）， v 是碰撞频率（常数）。将 \mathbf{r} 用电极化矢量 $\mathbf{P} = N e \mathbf{r}$ 代入，加上 $\partial / \partial t = i\omega$ ，可得：

$$-\frac{\omega^2 m}{Ne} \mathbf{P} = e \mathbf{E} + i\omega \frac{1}{N} \mathbf{P} \times \mathbf{B} - i\omega m v \frac{\mathbf{P}}{Ne} \quad (10)$$

引入三个反映等离子体特性的参量：

$$x = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\omega^2}, \quad \mathbf{y} = \frac{e\mathbf{B}}{m\omega}, \quad z = \frac{v}{\omega} \quad (11)$$

在本文选取的坐标系中， $\mathbf{y} = (0, y_T, y_L)$. 可以把式10写成分量的形式：

$$\begin{cases} x\varepsilon_0 E_1 + i(P_2 y_L - P_3 y_T) = -P_1(1 - iz) \\ x\varepsilon_0 E_2 + i(P_1 y_L) = -P_2(1 - iz) \\ x\varepsilon_0 E_3 + i(P_1 y_T) = -P_3(1 - iz) \end{cases} \quad (12)$$

前面式5的结论之一是 $D_3 = 0$, 这依定义等价于 $\varepsilon_0 E_3 + P_3 = 0$. 把这个小式子代入上一页的分量式12第三式可得:

$$P_3(1 - x - iz) = -iP_1y_T \quad (13)$$

将上式与分量式12前两式联立消去 P_3 得到:

$$\begin{cases} x\varepsilon_0 E_1 = \left[\frac{y_T^2}{1-x-iz} - (1-iz) \right] P_1 - iy_L P_2 \\ x\varepsilon_0 E_2 = iy_L P_1 - (1-iz) P_2 \end{cases} \quad (14)$$

这个本构关系, 与前面麦克斯韦方程得到的E – D关系构成后面讨论的基础。

均匀介质的magneto-ionic理论

对于线性均匀介质，可以引入一个复参数描述偏振：

$R = E_2/E_1 (= P_2/P_1)$ ， 将式14的两式相除得：

$$R = \frac{iy_L - (1 - iz)R}{\frac{y_T^2}{1 - x - iz} - (1 - iz) - iy_L R} \quad (15)$$

改写一下：

$$R^2 + R \cdot \frac{iy_T^2/y_L}{1 - x - iz} + 1 = 0 \quad (16)$$

这个方程的两个解，代表两种波模的偏振模式，记作 R_o 和 R_e ：

$$R_o, R_e = -\frac{iy_T^2}{2y_L(1-x-iz)} \pm i \left[1 + \frac{y_T^4}{4y_L^2(1-x-iz)^2} \right]^{1/2} \quad (17)$$

这两个解满足 $R_o R_e = 1$ ，反映波模偏振的正交性。在线性均匀介质中引入单一的折射率³： $\mathbf{D} = \mu^2 \epsilon_0 \mathbf{E}$ ， $\mathbf{P} = (\mu^2 - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}$ ，代入式14可得：

$$\mu^2 = 1 - \frac{x}{1 - iz - iy_L/R} \quad (18)$$

此即Appleton-Hartree公式。这一套均匀介质中波模的理论即magneto-ionic ("磁化电离气") 理论。

³后面都按照原文用 μ 表示折射率，磁化率不会再出现了。

非均匀介质的电矢量

本节开始分析更一般的非均匀的介质，还从以下两组方程出发：

$$\begin{cases} \varepsilon_0 E_1'' + D_1 = 0 \\ \varepsilon_0 E_2'' + D_2 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} x\varepsilon_0 E_1 = [\frac{y_T^2}{1-x-iz} - (1-iz)]P_1 - iy_L P_2 \\ x\varepsilon_0 E_2 = iy_L P_1 - (1-iz)P_2 \end{cases} \quad (20)$$

现在要从这两组方程中消去 $D_{1,2}$ 和 $P_{1,2}$ ，首先将 $D = \varepsilon_0 E + P$ 代入式20，得到：

$$\begin{cases} x\varepsilon_0 E_1 = \left[\frac{y_T^2}{1-x-iz} - (1-iz) \right] (D_1 - \varepsilon_0 E_1) - iy_L (D_2 - \varepsilon_0 E_2) \\ x\varepsilon_0 E_2 = iy_L (D_1 - \varepsilon_0 E_1) - (1-iz) (D_2 - \varepsilon_0 E_2) \end{cases} \quad (21)$$

再代入另外一组 $D-E$ 关系，得到：

$$\begin{cases} xE_1 = - \left[\frac{y_T^2}{1-x-iz} - (1-iz) \right] (E_1'' + E_1) + iy_L(E_2'' + E_2) \\ xE_2 = -iy_L(E_1'' + E_1) + (1-iz)(E_2'' + E_2) \end{cases} \quad (22)$$

从中解出 E_1'' 和 E_2'' 的表达式，整理得到：

$$\begin{cases} E_1'' + E_1 [1 + Ax(1 - iz)] = iy_L x A E_2 \\ E_2'' + E_2 \left\{ 1 + Ax \left[(1 - iz) - \frac{y_T^2}{1 - x - iz} \right] \right\} = -iy_L x A E_1 \end{cases} \quad (23)$$

其中参数A的表达式为：

$$A^{-1} = y_L^2 - (1 - iz)^2 + \frac{y_T^2(1 - iz)}{1 - x - iz} \quad (24)$$

式23可被认为是耦合波模方程的变体，等号的左边都是相同方向上的电矢量，而右边是不同方向的。等号右边的系数可以度量耦合程度。但需要注意的是，此处的 E_1 和 E_2 不一定是本征模式。为了得到真正的耦合波模方程，我们还需对电矢量做变换。

引入一组表示两个本征模式的变量：

$$\begin{cases} E_1 = \mathcal{E}_{1o} + \mathcal{E}_{1e} \\ E_2 = \mathcal{E}_{2o} + \mathcal{E}_{2e} \end{cases} \quad (25)$$

在非均匀介质中，每一点的介质参数不同，波模也不同。某一点处的波模被定义为是具有该点的参数的均匀介质中的波模。因此在每一点处仍引入偏振参数，和折射率：

$$\begin{cases} R_o = \mathcal{E}_{2o}/\mathcal{E}_{1o} \\ R_e = \mathcal{E}_{2e}/\mathcal{E}_{1e} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} D_{1,2o} = \mu_o^2 \epsilon_0 \mathcal{E}_{1,2o} \\ D_{1,2e} = \mu_e^2 \epsilon_0 \mathcal{E}_{1,2e} \end{cases} \quad (27)$$

结合式25和式27，可得：

$$\begin{cases} D_1/\epsilon_0 = \mu_o^2 \mathcal{E}_{1o} + \mu_e^2 \mathcal{E}_{1e} \\ D_2/\epsilon_0 = \mu_o^2 \mathcal{E}_{2o} + \mu_e^2 \mathcal{E}_{2e} \end{cases} \quad (28)$$

其中 $\mu_{o,e}$ 依定义仍由Appleton-Hartree公式给出。联立式7、式25、式26、式28，消去 $E_{1,2}$ 、 $\mathcal{E}_{2o,e}$ 和 $D_{1,2}$ ：得到：

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{1o}'' + \mathcal{E}_{1e}'' + \mu_o^2 \mathcal{E}_{1o} + \mu_e^2 \mathcal{E}_{1e} = 0 \\ \frac{1}{k^2} \left(R_o \frac{d^2 \mathcal{E}_{1o}}{dh^2} + \mathcal{E}_{1o} \frac{d^2 R_o}{dh^2} + 2 \frac{dR_o}{dh} \frac{d\mathcal{E}_{1o}}{dh} \right) + \mu_o^2 R_o \mathcal{E}_{1o} + (o \rightarrow e) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

耦合波模方程

从式29中解 $d^2\mathcal{E}_{1o,e}/dh^2$ 的表达式，整理为：

$$\left\{ \begin{array}{l} (R_o - R_e) \frac{d^2\mathcal{E}_{1o}}{dh^2} + k^2 \mu_o^2 (R_o - R_e) \mathcal{E}_{1o} \\ = -\mathcal{E}_{1o} \frac{d^2R_o}{dh^2} - \mathcal{E}_{1e} \frac{d^2R_e}{dh^2} - 2 \frac{dR_o}{dh} \frac{d\mathcal{E}_{1o}}{dh} - 2 \frac{dR_e}{dh} \frac{d\mathcal{E}_{1e}}{dh} \end{array} \right. \quad (30)$$

$(o \rightarrow e)$

该形式已经初现端倪。进行进一步的代换，利用 $R_o R_e = 1$ ，引入：

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_o = \mathcal{E}_{1o} \sqrt{1 - R_o^2} \\ \Pi_e = \mathcal{E}_{1e} \sqrt{1 - R_e^2} \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\psi = \frac{i}{R_o^2 - 1} \frac{dR_o}{dh} \quad (32)$$

整理得：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_o}{\partial h^2} + (k^2 \mu_o^2 - \psi^2) \Pi_o = -\Pi_e \frac{\partial \psi}{\partial h} - 2\psi \frac{\partial \Pi_e}{\partial h} \\ \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial h^2} + (k^2 \mu_e^2 - \psi^2) \Pi_e = \Pi_o \frac{\partial \psi}{\partial h} + 2\psi \frac{\partial \Pi_o}{\partial h} \end{cases} \quad (33)$$

这组方程即耦合波模方程，最早由Försterling在1942年得出⁴。这两个式子目前为止是精确的，没有做近似假设。

这页和上页的代换要求 $R_{o,e}$ 不等于1. 代回R的方程可知 $R_{o,e} = 1$ 等效于 $x = 1$ 且 $y_T^2 = \pm 2zy_L$ ，由于本文考虑的是高频电磁波， $x \ll 1$ ，所以目前的推导成立。

⁴Budden在文中指出，Försterling文章中的公式符号有误，我推了Budden的这版没有发现问题。

耦合参数 ψ

耦合波模方程中的 ψ 参数决定了耦合的程度，当 $\psi = 0$ 时，方程不存在耦合。 ψ 还可写成：

$$\psi = \frac{i}{R_o^2 - 1} \frac{dR_o}{dh} = \frac{1}{2} i \frac{d}{dh} \ln \frac{R_o - 1}{R_o + 1} = \frac{1}{2} i \frac{d}{dh} \ln \frac{R_e - 1}{R_e + 1} \quad (34)$$

利用两个带 \ln 的式子加上 R 的方程，

$$\begin{aligned} \psi = 0.5(\psi + \psi) &= \frac{1}{4} i \frac{d}{dh} \ln \frac{(R_o - 1)(R_e - 1)}{(R_o + 1)(R_e + 1)} \\ &= \frac{1}{4} i \frac{d}{dh} \ln \frac{1 - x - iz + iy_T^2/2y_L}{1 - x - iz - iy_T^2/2y_L} \end{aligned} \quad (35)$$

本文前述假设中，地磁场恒定，故 y 不随高度变化， x 和 z 随高度变化，故有：

$$\psi = \frac{y_T^2/4y_L}{(1-x-iz)^2 + y_T^4/4y_L^2} \left(-i \frac{dz}{dh} - \frac{dx}{dh} \right) \quad (36)$$

依定义， ψ 代表偏振 R 随高度的变化，同时它又依赖介质参数随高度的变化。

解的个数，齐次方程组

设想耦合波模方程能消去一个变量，则变为四阶微分方程，应有四个解：两列向下的波和两列向上的波。本文考虑的都是向下的波。若把耦合波模方程中含 ψ 的项都写到右边，方程变为：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_o}{\partial h^2} + k^2 \mu_o^2 \Pi_o = \psi^2 \Pi_o - \Pi_e \frac{\partial \psi}{\partial h} - 2\psi \frac{\partial \Pi_e}{\partial h} \\ \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial h^2} + k^2 \mu_e^2 \Pi_e = \psi^2 \Pi_e + \Pi_o \frac{\partial \psi}{\partial h} + 2\psi \frac{\partial \Pi_o}{\partial h} \end{cases} \quad (37)$$

当 ψ 很小（介质参数不均匀性很弱）时，舍去含 ψ 的项，得到：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_o}{\partial h^2} + k^2 \mu_o^2 \Pi_o = 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial h^2} + k^2 \mu_e^2 \Pi_e = 0 \end{cases} \quad (38)$$

这组解耦了的齐次方程的解用 $\pi_{o(1)}$ 、 $\pi_{o(2)}$ 、 $\pi_{e(1)}$ 、 $\pi_{e(2)}$ 标记。

齐次方程组的解

想解耦合方程组，首先看看齐次方程组的解。当 $\mu_{o,e}$ 不随高度变化时，解的形式直接通过积分得出：

$$\begin{cases} \pi_{o(1,2)} = Ce^{\pm ik\mu_o h} \\ \pi_{e(1,2)} = C'e^{\pm ik\mu_e h} \end{cases} \quad (39)$$

当 $\mu_{o,e}$ 随高度缓慢变化， $d\mu/dh \ll k\mu$ 时，有WKB(J)近似解：

$$\begin{cases} \pi_{o(1,2)} = \mu_o^{-1/2} e^{\mp ik \int \mu_o dh} \\ \pi_{e(1,2)} = \mu_e^{-1/2} e^{\pm ik \int \mu_e dh} \end{cases} \quad (40)$$

约定下标带(1)的解向上传播，(2)的解向下传播。

常数变易法

将式37改写成：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Pi_o}{\partial h^2} + k^2 \mu_o^2 \Pi_o = f_1(h) \\ \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial h^2} + k^2 \mu_e^2 \Pi_e = f_2(h) \end{cases} \quad (41)$$

以第一个式子为例，通解形式由齐次方程的解常数变易：

$$\Pi_o = g_1(h)\pi_{o(1)} + g_2(h)\pi_{o(2)} \quad (42)$$

令两个函数 $g_{1,2}$ 首先满足：

$$g'_1(h)\pi_{o(1)} + g'_2(h)\pi_{o(2)} = 0 \quad (43)$$

代回方程组41，得到 $g_{1,2}$ 满足的另一个方程：

$$g'_1(h)\pi_{o(1)}\beta + g'_2(h)\pi_{o(2)}\varsigma = f_1(h) \quad (44)$$

解得：

$$\begin{cases} g'_1 = \frac{\pi_{o(2)}}{W_o}f_1(h) \\ g'_2 = -\frac{\pi_{o(1)}}{W_o}f_1(h) \end{cases} \quad (45)$$

分母是朗斯基行列式：

$$W_o = \pi'_{o(1)}\pi_{o(2)} - \pi_{o(1)}\pi'_{o(2)} = -2ik \quad (46)$$

耦合波模方程形式解

把 $g_{1,2}$ 代回可得耦合波模方程的解长这样：

$$\begin{cases} \Pi_o(h) = \frac{\pi_{o(1)}(h) \int^h f_1(\eta) \pi_{o(2)}(\eta) d\eta - \pi_{o(2)}(h) \int^h f_1(\eta) \pi_{o(1)}(\eta) d\eta}{W_o} \\ \Pi_e(h) = \frac{\pi_{e(1)}(h) \int^h f_2(\eta) \pi_{e(2)}(\eta) d\eta - \pi_{e(2)}(h) \int^h f_2(\eta) \pi_{e(1)}(\eta) d\eta}{W_e} \end{cases} \quad (47)$$

常数被吸收在积分限中。这组解除了前面的WKB近似外没有更多近似，但它只是形式解，因为 $f_{1,2}$ 中也含有 $\Pi_{o,e}$ 。这组解传达的一个信息在于，o波和e波在非均匀介质中可以相互转化。

本文主要考虑向下的波，认为向上传播的波的振幅远小于向下的，于是形式解可进一步化简为：

$$\begin{cases} \Pi_o(h) = \frac{\pi_{o(2)}(h) \int^h f_1(\eta) \pi_{o(1)}(\eta) d\eta}{2ik} = A_o \pi_{o(2)} \\ \Pi_e(h) = \frac{\pi_{e(2)}(h) \int^h f_2(\eta) \pi_{e(1)}(\eta) d\eta}{2ik} = A_e \pi_{e(2)} \end{cases} \quad (48)$$

A_o 和 A_e 在耦合区域随高度变化：

$$\begin{cases} 2ikA_o = \int^h f_1(\eta) \pi_{o(1)}(\eta) d\eta \\ 2ikA_e = \int^h f_2(\eta) \pi_{e(1)}(\eta) d\eta \end{cases} \quad (49)$$

将式49两边对 h 求导可得：

$$\begin{cases} 2ikdA_o/dh = f_1(h)\pi_{o(1)}(h) \\ 2ikdA_e/dh = f_2(h)\pi_{e(1)}(h) \end{cases} \quad (50)$$

代入 $f_{1,2}$ 的具体表达式，可得：

$$\begin{cases} 2ik\frac{dA_o}{dh} = A_o\psi^2\pi_{o(1)}\pi_{o(2)} - A_e\pi_{o(1)}\pi_{e(2)}\frac{d\psi}{dh} - 2\psi\pi_{o(1)}\frac{d(A_e\pi_{e(2)})}{dh} \\ 2ik\frac{dA_e}{dh} = A_e\psi^2\pi_{e(1)}\pi_{e(2)} + A_o\pi_{e(1)}\pi_{o(2)}\frac{d\psi}{dh} + 2\psi\pi_{e(1)}\frac{d(A_o\pi_{o(2)})}{dh} \end{cases} \quad (51)$$

代入具体的等离子体参数后，可计算 ψ 和 $\mu_{o,e}$ ，进而算 $A_{o,e}$ ，得到耦合方程解。

Reference I

[Beskin and Philippov, 2012] Beskin, V. S. and Philippov, A. A.
(2012).

On the mean profiles of radio pulsars - I. Theory of propagation
effects.

MNRAS, 425(2):814–840.

[Cheng and Ruderman, 1979] Cheng, A. F. and Ruderman, M. A.
(1979).

A theory of subpulse polarization patterns from radio pulsars.
ApJ, 229:348–360.

Reference II

[Petrova and Lyubarskii, 2000] Petrova, S. A. and Lyubarskii, Y. E.
(2000).

Propagation effects in pulsar magnetospheres.

A&A, 355:1168–1180.

[Wang et al., 2010] Wang, C., Lai, D., and Han, J. (2010).

Polarization changes of pulsars due to wave propagation through
magnetospheres.

MNRAS, 403(2):569–588.