极限偏振理论在脉冲星辐射中应用

基于Lyubarskii & Petrova 1999 文章

曹顺顺

北京大学

2025 年 4 月 14 日

Outline

1 简要回顾

2 文章介绍

3 基本方程

4 均匀非转磁层

5 旋转磁层

6 参考文献

脉冲星辐射在磁层中传播过程

脉冲星磁层中的传播过程决定了辐射的偏振末态。研究传播过程主要是考虑磁层中波模的特性，即不同模式的色散关系和偏振本征态。脉冲星磁层，或者说更一般的磁化等离子体的一个基本特性在于**双折射**：磁场破坏了对称性，类似晶体中的光轴，引入了**寻常波模** (Ordinary mode, O mode) 和**非寻常波模** (Extraordinary mode, E/X mode). 强磁场中的它俩在观测上对应了脉冲星辐射中的**正交偏振模式** (Orthogonal Polarization Mode, OPM).

极限偏振 (limiting polarization)[1]

射电波从脉冲星磁层中出来的过程中，一定会经历一个磁层粒子数密度降低的区域。当粒子数密度足够低的时候，磁层不再对射电波有影响，这时我们可以说射电波的偏振已经被决定了，不再变了。这个不再变的偏振往往被称为**极限偏振 (limiting polarization)**. 若想定量描述射电波偏振行为，极限偏振是必须考虑的。极限偏振被决定下来的区域，在脉冲星磁层中一般叫limiting polarization region或polarization limiting region (PLR).

[1]这个中文翻译参考了金兹堡的《电磁波在等离子体中的传播》的翻译。

研究极限偏振的一个难点在于介质**不均匀**，这种不均匀性会引起波模之间的**耦合**。今天我们来看看极限偏振理论在脉冲星磁层中的一个应用：解释脉冲星信号中的圆偏振。报告基于Lyubarskii与Petrova于1999年发表在*Astrophysics and Space Science*的文章“ON THE CIRCULAR POLARIZATION OF PULSAR RADIATION”.

目标：圆偏振

脉冲星辐射中的圆偏振：

- 通常不如线偏振显著
- 有的在脉冲经度区间里符号相同
- 有的存在圆偏振变号，且经常在轮廓中心位置

圆偏振的产生机制分成两类：辐射机制产生圆偏振；传播过程产生圆偏振。

脉冲星磁层基本特点

- 偶极磁场主导，表面磁场很强 (10^8–10^{12} G)
- 电子-正电子等离子体，相对论性 ($\gamma \sim 10^2$)
- 如果磁场可看作无穷强，本征波模是线偏振的 (后面也会看到)
- 射电辐射来自开放磁力线区

在恒定无穷强磁场的均匀介质中，O模在波矢**k**与磁场方向矢量**b**张成的平面内，X模则垂直于这个平面.

极限偏振半径 (polarization-limiting radius)

回顾三周前介绍的Budden 1952电离层文章，在导出波模耦合方程后，Budden引入了一个描述耦合程度的参数：

$$\psi = \frac{i}{R_O^2 - 1} \frac{dR_O}{dh} \tag{1}$$

$R_O = E_{O,2}/E_{O,1}$是O模式的偏振参数 (也可用X模的)。ψ足够小时，耦合就不复存在。对于高频波来说，ψ的临界值约为：

$$|\psi| \approx k|n_O - n_X|/2 \tag{2}$$

极限偏振半径 (polarization-limiting radius)

ψ可表征偏振的变化率，或者介质参数的变化率。在脉冲星磁层中，ψ与磁力线的曲率半径量级一致，因而也跟与脉冲星中心之间的距离在同一量级。记磁层中波模之间发生显著耦合的位置距离脉冲星中心r_p，即极限偏振半径，它满足：

$$\frac{\omega}{c}|n_O - n_X| r_p \sim 1 \tag{3}$$

[Cheng and Ruderman, 1979]、[Barnard, 1986]等文章利用这个公式对极限偏振半径做了估计，对于1 GHz的电磁波，周期为1秒的、表面磁场10^{12} G的脉冲星磁层中极限偏振半径约为1000倍中子星半径。

文章的大致结构

首先列出基本方程，推导出脉冲星磁层中磁场近似无穷强情形下的波模耦合方程。考虑由于转动导致的变化的磁场，在一些极限情况下给出末态的偏振，计算圆偏振度。

本文档不会展示所有计算细节，但会说明文章推导中使用的近似。

麦克斯韦方程组和电荷守恒 (1)

射电波的电磁场 (扰动场) 满足:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = -\dfrac{i\omega}{c}\mathbf{E} + \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}_1 \\ \nabla \times \mathbf{E} = \dfrac{i\omega}{c}\mathbf{B} \end{cases} \tag{4}$$

其中$\mathbf{j}_1$是扰动电流。本文假设未扰动的$e^{\pm}$速度$\mathbf{v}_0$与数密度n_0分布都相同，故未扰动的电流$\mathbf{j}_0 = 0$，扰动电流可写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= (n_0 + n_1^+)(+e)(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1^+) + (n_0 + n_1^-)(-e)(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1^-) - \mathbf{j}_0 \\ &= e[\mathbf{v}_0(n_1^+ - n_1^-) + n_0(\mathbf{v}_1^+ - \mathbf{v}_1^-)] \end{aligned} \tag{5}$$

麦克斯韦方程组和电荷守恒 (2)

$\mathbf{j}_1$满足电荷守恒方程为：

$$-i\omega e(n_1^+ - n_1^-) + \nabla\cdot\mathbf{j}_1 = 0 \tag{6}$$

以上的方程均已采用谐振解，$\partial/\partial t = -i\omega$

带电粒子运动方程 (1)

首先，相对论粒子在外电磁场中的一般运动方程为：

$$\frac{d(\gamma m\mathbf{v})}{dt} = e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c] \tag{7}$$

在近似无穷强的、旋转[2]的背景磁场中，可将带电粒子视作被串在磁力线上运动，即将粒子运动简单分成两部分：沿磁力线的运动，和跟磁力线一起转的运动：

$$\mathbf{v} = v_b\mathbf{b} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \tag{8}$$

[2]如果磁场对称中心与自转轴重合，就没有磁场旋转。

带电粒子运动方程 (2)

把一般运动方程7展开：

$$\gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \gamma^3 m \mathbf{v} v \frac{dv}{dt} / c^2 = e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c] \tag{9}$$

考虑到$\gamma \gg 1$，上式左边只保留γ^3项。且由于$v_b \gg |\Omega \times \mathbf{r}|$以及$v_b \approx c$，上式左边可进一步改写为：

$$\gamma^3 m \frac{v_b}{dt} \mathbf{b} \tag{10}$$

运动方程最终改写为 (其中$d/dt = -i\omega + \mathbf{v}^{\pm} \cdot \nabla$)：

$$\gamma^3 m \frac{v_b^{\pm}}{dt} = \pm e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c] \cdot \mathbf{b} \tag{11}$$

两个麦克斯韦方程4、电荷守恒方程6和运动方程11构成对电磁波波-磁层等离子体相互作用的自洽的描述。由于极限偏振区域粒子数密度低，波模的折射率都接近1，可以不考虑折射。取波矢方向为z轴，只需要考虑z方向上的参数变化。

方便起见，把速度分解也代入电流表达式：

$$\mathbf{j}_1 = e[v_b(n_1^+ - n_1^-) + n_0(v_1^+ - v_1^-)]\mathbf{b} + e(n_1^+ - n_1^-)(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) = j_b\mathbf{b} + \mathbf{j}_{\Omega\times r} \tag{12}$$

把正电子和电子的运动方程相减 (得到都是$n_+ - n_-$的形式)：

$$\gamma^3 m\left[-i\omega(v_1^+ - v_1^-) + v_{0z}\frac{d(v_1^+ - v_1^-)}{dz}\right] = 2e\left[\mathbf{E} - \frac{i(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\times(\nabla\times\mathbf{E})}{\omega}\right]\cdot\mathbf{b} \tag{13}$$

空间分量的分解

由于折射率接近1，波动的空间分量应该接近$\exp(i\frac{\omega}{c}z)$，于是可以把扰动量写为：

$$\begin{cases} E_{x,y,z} = a_{x,y,z}(z)\exp(i\frac{\omega}{c}z) \\ j_b = a_j(z)\exp(i\frac{\omega}{c}z) \\ n_1^+ - n_1^- = a_n(z)\exp(i\frac{\omega}{c}z) \end{cases} \tag{14}$$

其中振幅$a_\mu(z)$是z的缓慢变化的函数，满足：

$$\frac{da_\mu}{dz} \ll \frac{a_\mu \omega}{c} \tag{15}$$

耦合方程推导 (1)

在麦克斯韦方程中消去B，再引入一个量：

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{b} \times (\Omega \times \mathbf{r})}{c} \tag{16}$$

代入上一页的空间分量分解，利用振幅缓慢变化的特定舍去高阶导数项，首先得到电场分量方程：

$$\begin{cases} \dfrac{da_x}{dz} + \dfrac{2\pi}{c}[a_j b_x + e a_n (\Omega \times \mathbf{r})_x] = 0, \\ \dfrac{da_y}{dz} + \dfrac{2\pi}{c}[a_j b_y + e a_n (\Omega \times \mathbf{r})_y] = 0, \\ a_z + \dfrac{4\pi i}{\omega}[a_j b_z + e a_n (\Omega \times \mathbf{r})_z] = 0, \end{cases} \tag{17}$$

耦合方程推导 (2)

加上电荷守恒:

$$ea_n\left[1-\left(\frac{\Omega\times\mathbf{r}}{c}\right)_z\right]-\frac{a_j}{c}b_z=0 \tag{18}$$

运动方程:

$$\begin{aligned}&-i\omega(a_j-ev_b a_n)\left[1-\frac{v_b}{c}b_z-\left(\frac{\Omega\times\mathbf{r}}{c}\right)_z\right]\\&=\frac{2e^2n_0}{m\gamma^3}[a_x(b_x+q_y)+a_y(b_y-q_x)+a_zb_z]\end{aligned} \tag{19}$$

从5个方程中消去a_z, a_n和a_j

耦合方程推导 (3)

引入一个参数R：

$$R = \frac{4\pi n_0 e^2/m}{\omega c \gamma^3 (1-\beta_z)^2} = \frac{\omega_p^2}{2\omega c \gamma^3 (1-\beta_z)^2} \tag{20}$$

其中$\beta_z = \left(\frac{\Omega \times \mathbf{r}}{c}\right)_z + \frac{v_b}{c} b_z$. 在高频波近似下 ($Rc/\omega \ll 1$)，整理可得波模耦合方程：

$$\begin{cases} \frac{da_x}{dz} = -iR[(b_x+q_y)^2 a_x + (b_x+q_y)(b_y-q_x)a_y] \\ \frac{da_y}{dz} = -iR[(b_x+q_y)(b_y-q_x)a_x + (b_y-q_x)^2 a_y] \end{cases} \tag{21}$$

均匀非转磁层情形

在均匀非转磁层中，$\mathbf{q}=0$，R和$\mathbf{b}$都不依赖于z. 并且扰动空间分量应正比$\exp(i\frac{\omega}{c}nz)$，即$a_\mu(z)$正比$\exp(-i\frac{\omega}{c}(1-n)z)$，于是耦合方程化为：

$$\begin{pmatrix} Rb_x^2-\frac{\omega}{c}(1-n) & Rb_xb_ya_y \\ Rb_xb_y & Rb_y^2-\frac{\omega}{c}(1-n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}=0 \qquad (22)$$

矩阵行列式为0，可得折射率n的两个解，即两个色散关系：

$$n=1-\frac{\omega_p^2}{2\omega^2\gamma^3}\frac{b_x^2+b_y^2}{(1-\beta_z)^2}, \qquad n=1 \qquad (23)$$

两个本征波模

这两个色散关系对应的本征矢量（本征波模）分别为：

$$-b_y a_x + b_x a_y = 0, \qquad b_x a_x + b_y a_y = 0 \tag{24}$$

前者平行磁力线平面，后者垂直磁力线平面。依照前面的定义，前者是O模，后者是E/X模。这两个解最早由[Melrose and Stoneham, 1977]给出，是讨论磁层传播特性的基础之一。下面考虑旋转，以解析更真实的传播过程。

旋转磁层中的非耦合解 (1)

对耦合波模方程采取 (类WKB的) 试探解$a_{x,y} = a_{x,y}^{(0)} \exp[G(z)]$，得：

$$\begin{cases} \dfrac{da_x^{(0)}}{dz} + a_x^{(0)} \dfrac{dG}{dz} = -iR[(b_x+q_y)^2 a_x^{(0)} + (b_x+q_y)(b_y-q_x)a_y^{(0)}] \\ \dfrac{da_y^{(0)}}{dz} + a_y^{(0)} \dfrac{dG}{dz} = -iR[(b_x+q_y)(b_y-q_x)a_x^{(0)} + (b_y-q_x)^2 a_y^{(0)}] \end{cases} \tag{25}$$

当$Rz \gg 1$且G与Rz在同一量级时，可忽略$da_{x,y}^{(0)}/dz$项，得到新的本征方程：

$$\begin{pmatrix} dG/dz + iR(b_x+q_y)^2 & iR(b_x+q_y)(b_y-q_x) \\ iR(b_x+q_y)(b_y-q_x) & dG/dz + iR(b_y-q_x)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x^{(0)} \\ a_y^{(0)} \end{pmatrix} = 0 \tag{26}$$

旋转磁层中的非耦合解 (2)

取行列式为0，得本征值以及本征矢量解为：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dG}{dz}\right)_o = -iR[(b_x+q_y)^2+(b_y-q_x)^2] \\ \left(\dfrac{dG}{dz}\right)_e = 0 \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a_x^{(0)}}{a_y^{(0)}}\right)_o = \dfrac{b_x+q_y}{b_y-q_x} \\ \left(\dfrac{a_x^{(0)}}{a_y^{(0)}}\right)_e = -\dfrac{b_y-q_x}{b_x+q_y} \end{cases} \tag{28}$$

从式27也可见G与Rz在同一量级的假设成立。如果没有旋转 $(\mathbf{q}=0)$，则本征模式退回到均匀磁层的情形。

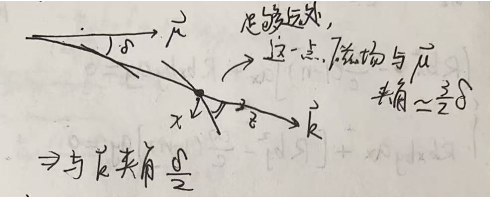
旋转磁层中的非耦合解 (3)

我们发现，当$Rz \gg 1$（n足够大或γ足够小）时，空间每一点处的本征模式，与一个参数与该点相同的均匀介质中的本征模式，是一样的。这与Budden 1952文章电离层中的结论一致，在这种情况下波模独立传播，几何光学近似/WKB近似成立。式28反映了内层磁层中波模“跟随”局域磁场的特性，

即[Cheng and Ruderman, 1979]提出的“Adiabatic walking”.

旋转磁层位形 (1)

当$Rz \sim 1$时，非耦合解就不成立了。首先需要得出**b**和**q**对z的依赖，这取决于磁场位形。我们这里只考虑旋转偶极场，而磁层电流引起的磁场扭转是更高阶的效应。

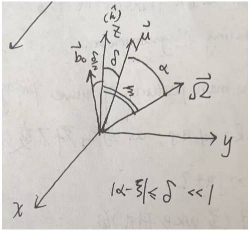


假设波矢与磁轴夹角δ (小角度)，初始时刻磁场在$z-x$平面内，则初始的磁场方向为：

$$\mathbf{b} = (\sin(\delta/2), 0, \cos(\delta/2)) \approx (\delta/2, 0, 1-\delta^2/8) \qquad (29)$$

旋转磁层位形 (2)

加上旋转，假设自转轴与磁轴夹角α，与波矢夹角ξ，自转轴、磁轴、波矢不一定共面，因此$|\alpha-\xi|\leq\delta$.



经过一些矩阵运算后，结合小角近似我们得到：

$$\begin{cases} b_x = \dfrac{\delta}{2} + \Omega t \sin\xi \dfrac{\sqrt{\delta^2-(\alpha-\xi)^2}}{\delta} \\ b_y = \pm\Omega t \sin\xi \dfrac{\alpha-\xi}{\delta} \end{cases} \tag{30}$$

旋转磁层位形 (3)

以及$b_z = 1-(b_x^2+b_y^2)/2$. 式子中的t可以用z/c代换掉。有了$\mathbf{b}$之后可直接算$\mathbf{q}$:

$$\mathbf{q} = \left(\mp\frac{\Omega z}{c}\sin\xi\frac{\alpha-\xi}{\delta}, \frac{\Omega z}{c}\sin\xi\frac{\sqrt{\delta^2-(\alpha-\zeta)^2}}{\delta}, 0\right) \tag{31}$$

以上两式中符号不确定的部分决定于$\mu\cdot(\mathbf{k}\times\Omega)$，或者说是波矢相对于磁轴和自转轴张成平面（基准平面）的位置。

转动较慢脉冲星的近似 (1)

要解析求解波模耦合方程，需要代入**b**和**q**. 这俩矢量都不简单，所以比较好做的方式是取一些极限来简化它们。首先我们考虑转动较慢的脉冲星，让b_x的第二项远小于第一项，此时β_z可以写成：

$$\beta_z = \left(\frac{\Omega \times \mathbf{r}}{c}\right)_z + \frac{v_b}{c} b_z \approx 0 + 1 \cdot (1 - b_{x0}^2/2) = 1 - \delta^2/8 \tag{32}$$

于是$R \approx \dfrac{32\omega_p^2}{\omega c \gamma^3 \delta^4}$. 根据极限偏振半径的定义，引入$z_p$满足：

$$\frac{8\omega_p^2(z_p) z_p}{\omega c \gamma^3 \delta^2} = 1 \tag{33}$$

转动较慢脉冲星的近似 (2)

考虑$\omega_p^2 \propto n_e \propto z^{-3}$，可将$R$改写成：

$$R = \frac{4}{z_p \delta^2} \frac{z_p^3}{z^3} \tag{34}$$

有$z_p / r_L \delta \ll 1$ $(r_L = c/\Omega)$. 再代**b**和**q**入耦合波模方程，最后可得：

$$\begin{cases} \dfrac{da_x}{du} - iua_x = i\dfrac{z_p}{r_L \delta}\eta(4b_1 a_x \pm 2b_2 a_y) \\ \dfrac{da_y}{du} = \pm i\dfrac{z_p}{r_L \delta} 2\eta b_2 a_x \end{cases} \tag{35}$$

其中$u = z_p/z$, $\eta = 2\sin\xi$, $b_1 = \sqrt{\delta^2 - (\alpha - \xi)^2}/\delta$, $b_2 = (\alpha - \xi)/\delta$.

转动较慢脉冲星的近似 (3)

等式的右边表现出耦合。如果入射纯线偏振O模，$a_{x0}=C_x$, $a_{y0}=0$, 则可得最低阶的解为：

$$\begin{cases} a_x = C_x \exp(iu^2/2) \\ a_y = \pm i \dfrac{2z_p}{r_L\delta}\eta b_2 C_x \displaystyle\int_{z_p/z_0}^{u} \exp(iu'^2/2)du' \end{cases} \tag{36}$$

当$z\to\infty$，得出射末态解为：

$$\begin{cases} a_x = C_x \\ a_y = \mp i\sqrt{2\pi}\dfrac{z_p}{r_L\delta}\eta b_2 C_x \exp(i\pi/4) \end{cases} \tag{37}$$

转动较慢脉冲星的近似 (4)

有虚部出现，代表有圆偏振成分：

$$\Pi_V = \frac{V}{I} = \frac{i(a_y a_x * - a_x a_y *)}{a_x a_x * + a_y a_y *} = \pm 4\sqrt{\pi}\frac{z_p}{r_L \delta}\sin\xi\frac{\alpha - \xi}{\delta} \tag{38}$$

选取特定的参数组，可以实现$\Pi_V > 0.1$，得到足够显著的圆偏振。

Reference I

[Barnard, 1986] Barnard, J. J. (1986).

Probing the magnetic field of radio pulsars - a reexamination of polarization position angle swings.

The Astrophysical Journal, 303:280.

[Beskin and Philippov, 2012] Beskin, V. S. and Philippov, A. A. (2012).

On the mean profiles of radio pulsars - I. Theory of propagation effects.

MNRAS, 425(2):814–840.

Reference II

[Cheng and Ruderman, 1979] Cheng, A. F. and Ruderman, M. A. (1979).

A theory of subpulse polarization patterns from radio pulsars.

ApJ, 229:348–360.

[Melrose and Stoneham, 1977] Melrose, D. B. and Stoneham, R. J. (1977).

The natural wave modes in a pulsar magnetosphere.

PASA, 3:120–122.